1 paskaita ir 2 pratybos. Pirmykštė funkcija ir neapibrėžtinis integralas, jo pagrindinės savybės. Tiesioginis integravimas

1. Pirmykštės funkcijos ir neapibrėžtinio integralo sąvokos

Diferencialinio skaičiavimo pagrindinis uždavinys – rasti funkcijos $F(x)$ išvestinę $F'(x) = f(x)$ arba diferencialą $dF(x) = f(x)\,dx$. Dažnai tenka spręsti atvirkštinį uždavinį – ieškoti funkcijos $F(x)$, kai žinoma šios funkcijos išvestinė $f(x)$ arba diferencialas $f(x)\,dx$.

1 apibrėžimas. *Funkcija* $F(x)$ *vadinama funkcijos* $f(x)$ ***pirmykšte funkcija*** *atkarpoje* $[a; b]$, *jeigu visuose šios atkarpos taškuose* x *teisinga lygybė*

$$F'(x) = f(x) \quad \text{arba} \quad dF(x) = f(x)\,dx.$$

Analogiškai apibrėžiama funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija begaliniame bei atvirame intervale $(a\,; b)$.

1 pavyzdys. Funkcijos $f(x) = x^5$ pirmykštės funkcijos $F(x)$ intervale $-\infty;+\infty)$ yra šios: $F(x) = \frac{x^6}{6}$, $F(x) = \frac{x^6}{6}+7$, $F(x) = \frac{x^6}{6} - 3{,}2$, $F(x) = \frac{x^6}{6} + C$ (čia C – laisvoji konstanta), nes

$$F'(x) = \left(\frac{x^6}{6}\right)' = \left(\frac{x^6}{6}+7\right)' = \left(\frac{x^6}{6}-3{,}2\right)' = \left(\frac{x^6}{6}+C\right)' = x^5 = f(x). \ \blacktriangle$$

2 pavyzdys. Funkcijos $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pirmykštės funkcijos $F(x)$ intervaluose $\left(\pi k - \frac{\pi}{2}; \pi k + \frac{\pi}{2}\right)$ (čia $k \in \mathbf{Z}$) yra šios: $F(x) = \operatorname{tg} x$, $F(x) = \operatorname{tg} x + \pi$, $F(x) = \operatorname{tg} x - 5$, $F(x) = \operatorname{tg} x + C$, nes

$$F'(x) = (\operatorname{tg} x)' = (\operatorname{tg} x + \pi)' = (\operatorname{tg} x - 5)' = (\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x} = f(x). \ \blacktriangle$$

Vadinasi, jei funkcija $f(x)$ turi vieną pirmykštę funkciją $F(x)$, tai ji turi jų be galo daug ir jos apibūdinamos formule $F(x)+C$. Įrodyta, kad iš formulės $F(x)+C$, keičiant konstantos C reikšmes, gaunamos visos pirmykštės funkcijos.

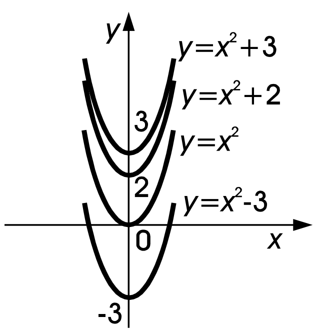
2 apibrėžimas. *Jeigu funkcija* $F(x)$ *yra funkcijos* $f(x)$ *pirmykštė funkcija, tai reiškinys* $F(x)+C$ *(čia* C *– konstanta) vadinamas funkcijos* $f(x)$ ***neapibrėžtiniu integralu***. *Jis žymimas simboliu* $\int f(x)dx$. *Ženklas* $\int$, *vadinamas integralo ženklu*, yra stilizuota raidė „s" ir kilęs iš lotyniško žodžio *summa* pirmosios raidės.

Funkcija $f(x)$ vadinama *pointegraline funkcija*, $f(x)dx$ – *pointegraliniu reiškiniu*, x – *integravimo kintamuoju*.

Vadinasi, $\int f(x)dx = F(x)+C$, $C = const$, kai $F'(x) = f(x)$.

Veiksmas, kuriuo randama duotosios funkcijos pirmykštė funkcija, vadinamas ***integravimu***. Jis yra atvirkštinis diferencijavimui.

Geometriškai neapibrėžtinis integralas reiškia šeimą kreivių $y = F(x)+C$, kurių kiekviena gaunama lygiagrečiai pastumiant funkcijos $y = F(x)$ grafiką ašies Oy kryptimi į viršų ar į apačią. 3 paveiksle pavaizduotos kelios $\int 2x dx = = x^2 + C$ šeimos kreivės.



3 pav.

Ar kiekviena funkcija, apibrėžta kuriame nors intervale, turi pirmykštę?

Pasirodo, kad bendruoju atveju tenka atsakyti neigiamai. Tačiau, kai funkcija $f(x)$ yra tolydi atkarpoje $[a\,; b]$, tai jos pirmykštė funkcija (kartu ir neapibrėžtinis integralas) egzistuoja visada.

Suformuluosime pagrindines neapibrėžtinio integralo savybes:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

3) $\int dF(x) = F(x)+C$.

4) $\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$, $\alpha,\beta-const$.

Paskutinioji savybė vadinama neapibrėžtinio integralo tiesiškumo savybe.

2. Neapibrėžtinių integralų lentelė

Jeigu $F'(x)=f(x)$, tai

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

todėl, žinodami elementariųjų funkcijų išvestines, galime sudaryti neapibrėžtinių integralų lentelę.

1. $\int dx=x+C$.
2. $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ $(\alpha\neq-1)$, $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C$.
3. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$.
4. $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C$.
5. $\int e^{x}dx=e^{x}+C$.
6. $\int\sin x dx=-\cos x+C$.
7. $\int\cos x dx=\sin x+C$.
8. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}\, x+C$.
9. $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\ \mathrm{ctg}\, x+C$.
10. $\int\frac{dx}{1+x^2}=\mathrm{arctg}\, x+C=-\ \mathrm{arcctg}\, x+C$.
11. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+C$.
12. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C=-\ \arccos x+C$.
13. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$.
14. $\int\mathrm{tg}x dx=-\ln|\cos x|+C$.
15. $\int\mathrm{ctg}x dx=\ln|\sin x|+C$.
16. $\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.
17. $\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$.
18. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$.
19. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$.

11 ir 13 – 19 formulių pirmykščių funkcijų nėra išvestinių lentelėje. Šių formulių teisingumu galėtume įsitikinti, išdiferencijavę dešinėse jų pusėse esančius reiškinius. Visais atvejais gautume atitinkamas pointegralines funkcijas.

Paaiškinsime 3 formulę. Žinome, kad

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{kai } x > 0, \\ \ln(-x), & \text{kai } x < 0, \end{cases}$$

todėl

$$(\ln|x|)' = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{kai } x > 0, \\ \dfrac{1}{-x}\cdot(-1), & \text{kai } x < 0. \end{cases}$$

Taigi abiem atvejais nepriklausomai nuo x ženklo

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad ,$$

vadinasi, $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

1 pavyzdys. $\int\left(3x^2 - 2\sin x + 6\sqrt{x}\right)dx = \int 3x^2 dx - \int 2\sin x dx + \int 6\sqrt{x}dx =$

$$= 3\int x^2 dx - 2\int \sin x dx + 6\int x^{\frac{1}{2}} dx = 3\cdot\frac{x^3}{3} + 2\cos x + 6\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= x^3 + 2\cos x + 4x\sqrt{x} + C. \quad \blacktriangle$$

2 pavyzdys. $\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx =$

$$= \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg}\, x - x + C. \quad \blacktriangle$$

3. Tiesioginio integravimo metodas

Šis metodas pagrįstas integravimo formulių invariantiškumu, reiškiančiu, jog pagrindinių integralų formulės visada yra teisingos; ir nesvarbu, ar integravimo kintamasis yra nepriklausomas, ar bet kuri diferencijuojama to kintamojo funkcija. Pavyzdžiui,

$$\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1), \tag{1}$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C. \tag{2}$$

1 pavyzdys. $\int (3x+5)^{2010} dx$. Kadangi $d(3x+5) = 3\,dx$, tai $dx = \frac{1}{3}d(3x+5)$ ir $\int (3x+5)^{2010} dx = =$

$\frac{1}{3}\int (3x+5)^{2010} d(3x+5) = \frac{1}{3}\frac{(3x+5)^{2010}}{2011} + C$ (pritaikėme (1) formulę). $\blacktriangle$

Apskritai visada galima dx pakeisti $\frac{1}{a}d(ax+b)$, nes $d(ax+b) = a dx$ ir $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$, $a \neq 0$.

2 pavyzdys. $\int x^2 \sqrt[4]{x^3+4}\,dx = \int x^2 \left(x^3+4\right)^{\frac{1}{4}} dx$. Kadangi $d\left(x^3+4\right)=$

$=3x^2dx$, tai $x^2dx = \frac{1}{3}\,d(x^3+4)$. Tuomet $\int x^2 \sqrt[4]{x^3+4}\,dx = \frac{1}{3}\int \left(x^3+4\right)^{\frac{1}{4}} d\left(x^3+4\right) = \frac{1}{3}\,\frac{\left(x^3+4\right)^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + C = \frac{4}{15}(x^3+4)\sqrt[4]{x^3+4}$ $+C$ (pritaikėme (1) formulę). ▲

3 pavyzdys. $\int \sin(2x-3)dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x-3)d(2x-3) = -\frac{1}{2}\cos(2x-3)+C$. ▲

4 pavyzdys. $\int \frac{(6x-5)dx}{3x^2-5x+7} = \int \frac{d\left(3x^2-5x+7\right)}{3x^2-5x+7} = \ln\left|3x^2-5x+7\right| + C$ (pritaikėme (2) formulę). ▲

5 pavyzdys. $\int \mathrm{tg}x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln\left|\cos x\right| + C$ (pritaikėme (2) formulę). Gavome integralų lentelės 14 formulę. ▲