Prof. Dr. R. Plato
A. Garanza

6.Übung zur Vorlesung *Höhere Mathematik 1*

Wintersemester 2013/14

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Die Radiokarbonmethode, oder auch Radiokarbondatierung, ist ein Verfahren, das oft dazu verwendet wird, das Alter der organischen Fossilien festzustellen. Bei diesem Verfahren geht man davon aus, dass alle lebenden Organismen einen gewissen Anteil an ^{14}C-Atom in ihren Körpern enthalten. Die Menge an gebundenen radioaktiven ^{14}C-Atomen nimmt gemäß dem Zerfallsgesetz (d.h. exponentiel) ab. Die lebenden Organismen nehmen neue ^{14}C-Atome aus der Umwelt z.B. durch Nahrung wieder auf und halten so den Anteil dieser Isotope konstant. Nach dem Tod nimmt die Menge an ^{14}C-Atomen nur noch ab und das Alter des Fossils kann anhand der verbliebenen Menge berechnet werden.
Bestimmen Sie die Funktion, die die Restmenge an ^{14}C-Atomen beschreibt, wenn zum Todeszeitpunkt $t = 0$ die Menge an ^{14}C-Atomen gleich der Konstanten M war, d.h. $f(0) = M$. Die Halbwertszeit von ^{14}C-Isotopen, also die Zeitspanne, in der die Hälfte der vorhandenen Menge zerfällt, beträgt 5730 Jahre.
Hinweis: Die allgemeine Exponentialfunktion lautet: $f(t) = c \cdot e^{\lambda \cdot t}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte (2+2+2)).
Bestimmen Sie ohne die Hilfe eines Taschenrechners Definitionsbereich und Lösungsmenge folgender Gleichungen:

a) $e^x - 7 = \log_{12}(144)$

b) $3\log_2(3x) - \log_2(3) = \log_2(x) - 4$

c) $5\lg\sqrt[3]{3x-2} - 2 = \lg(\sqrt[3]{3x-2}),\quad$ wobei $\lg x = \log_{10} x$.

Aufgabe 3 (4 Punkte (2+2)).
Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln \sqrt[n^3]{2n-1}$

Aufgabe 4 (6 (2 +2+2) Punkte).
Beweisen Sie folgende Gleichungen:

a) $\cos(2\varphi) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)$

b) $\sin(2\varphi) = 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)$

c) $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\varphi)}{2}}$

Abgabe der Lösungen spätestens am 02.12.2013 (Montag) um 14.00 Uhr VOR der Vorlesung.